周期的カオスのスペクトル構造
―― パワースペクトルに対する普遍的な漸化式 ――

九大理・物理　吉　田　　健

周期倍化分岐はカオスへの普遍的なひとつの道筋であり[1),2)]それに対応して，臨界点直後のカオスはひとつの普遍的な構造を示す。すなわち，アトラクターはバンド構造をもち，バンド分離分岐が起こる。[3)] このようなカオスを周期的カオスと呼ぶ。ここでは，周期的カオスのパワースペクトルが普遍的な漸化式で表現される特徴的な構造をもつことを論ずる。

周期的カオスを呈する最も簡単な力学系はテント写像

$$f_a(x) = \begin{cases} ax & (0 \leqq x \leqq 1/2) \\ a(1-x) & (1/2 < x \leqq 1) \end{cases}$$

で運動する一次元離散時間の系

$$x_n = f_a(x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。a は制御パラメター。周期倍化分岐はこの場合 $a=1$ の一点に縮退しており，$1 < a \leqq 2$ の全域でカオスである。バンド分離点は $a_m = 2^{1/M} (M \equiv 2^m)$ であり，$a_{m+1} < a \leqq a_m$ ($m = 0, 1, 2, \cdots$) でアトラクターはM個のバンドから成る。[4)]

バンド分離の状態では，非周期軌道の時間相関関数のパワースペクトルは周期成分の線スペクトルとカオス成分の連続スペクトルから成る。丁度バンド分離点 $a=a_m$ では，これらは比較的簡単に解析的方法で計算できる。[5)] その定式によれば，初期値を $x_0 = 1/2$ として軌道を $x_1, x_2 \cdots, x_{M+M/2}$ まで求めればスペクトルの両成分が完全に決定される。[6)]

この適切な軌道のスケーリング性に着目して，$a=a_m$ でのスペクトルのそれぞれの成分を，$a=a_{m-1}$ でのスペクトルの対応する成分から完全に決める漸化式を得る。[7)] 漸化式は２つのスケール因子 α_1，α_2 を含み，テント写像の場合にはそれらはパラメータ a に依存する。$a=a_0=2$ では任意の非周期軌道に対して $\langle x \rangle = 1/2$，$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 1/12$，スペクトルは白いスペクトルである。これから勝手なバンド分離点でのスペクトルが漸化式により直ちに求められることになる。

上述の漸化式はテント写像のバンド分離点の間で厳密に成り立つものとして解析的に得られた。[7)] しかし実は同じ形の漸化式は周期的カオスを特徴づける普遍的な漸化式となっているので

ある。この結論は主に数値的方法で得られた。以下に，その成立範囲を拡張して現在までに得た結果を示す。

(i) テント写像では，$1<a\leqq\sqrt{2}$ なる任意のパラメーター値 a に対して，a と $a'=a^2$ の２つのカオス状態の間で同じ漸化式が成り立つ。

(ii) 一般のテント写像[4)]

$$f_{a,b}(x)=\begin{cases} ax & [0\leqq x\leqq b/(a+b)] \\ b(1-x) & [b/(a+b)<x\leqq 1] \end{cases}$$

では，２つのスケール因子を対応するものにとれば，(a, b) と $(a'=b^2, b'=ab)$ の２つのカオス状態の間で同じ形の漸化式が成立する。ここで，(a, b) は $a>1$, $b>1$, $a+b\geqq ab^2$ なるパラメーターの任意の組である。

(iii) Logistic map $f_a(x)=ax(1-x)$ では，スケール因子を $\alpha_1=\alpha^2$, $\alpha_2=-\alpha$ にとれば，$a_{m+1}<a\leqq a_m$ なる a と対応する $a_m<a'<a_{m-1}$ なる a' の２つの状態の間で同じ形の漸化式が漸近的に成り立つ。[7)] ここで，a_m はこの写像の系のバンド分離点．α は Feigenbaum のスケール因子である：$\alpha=2.502907\cdots$。[1),8)] a が「窓」内にあれば a' も対応する「窓」内にあり，スペクトルはカオス成分をもたない。周期成分は同じ形の漸化式を満たす。

(iv) 例えば，$f_a(x)=ax(1-x)(2-x)$ や $f_a(x)=ax(1-x^2)$ のように，極大の指数が２である写像に対しては (iii) と同様になる。

(v) $f_a(x)=a(1-|2x-1|^z)$ のように，極大の指数が $z\,(>1)$ である写像に対しては，スケール因子をそれに対応したものにとりさえすれば，(iii) と同様のことが言える。スケール因子は，$z=1.5$ では $\alpha_1=|\alpha_2|^{1.5}$; $\alpha_2=-3.388665\cdots$; $z=3$ では $\alpha_1=|\alpha_2|^3$; $\alpha_2=-1.927690\cdots$ である。

パワースペクトルやその漸化式の表式については文献 7) を参照。普遍性についてのくわしい結果は近く発表の予定。多次元写像や微分方程式の系に対しては今後の問題である。

参考文献

1) M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19** (1978), 25.

2) J.-P. Eckmann, Rev. Mod. Phys. **53** (1981), 643.
H. L. Swinney, Physica **7D** (1983), 3.

3) R. M. May, Nature **261** (1976), 459.
S. Grossmann and S. Thomae, Z. Naturforsch. **32a** (1977), 1353.

4) S. Ito, S. Tanaka and H. Nakada, Tokyo J. Math. **2** (1979), 221, 241.

5) T. Yoshida, H. Mori and H. Shigematsu, J. Stat. Phys. **31** (1983), 279.

6) T. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **72** (1984), 895.

7) T. Yoshida, Prog. Theor. Phys. **73** (1985), No. 2.

8) M. J. Feigenbaum, Phys. Lett. **74A** (1979), 375; Physica **7D** (1983), 16.

間欠的カオスのスペクトル構造

九大・理　森　肇，徐丙鉄，黒木昌一

カオス側$\varepsilon>0$においてカオスの発生点$\varepsilon=0$に近づくとき，制御パラメタεに依らない漸近則が存在するかどうかは，基礎的問題の一つと考えられる。相転移の臨界現象では，このような漸近則として，rescaleされた状態方程式や時空相関関数が知られている。しかし，カオスの場合には，このような漸近則の存在は自明ではない。というのは，間欠的カオスの接線分岐などで知られている軌道の自己相似性は，奇妙なアトラクタの，極く小さな小領域で成立するに過ぎないからである。不変確率密度はこの小領域に集中しているが，例えば，バーストによる位相のジャンプは，この小領域の外側できまる。また，一般に２つ以上の特性時間が存在するのである。

ここでは，パワースペクトルについてこの問題を考察した。ここには，もう一つの基礎的問題がある。カオスの性質をきめる不変確率密度やその他の統計量の理論的計算は，現在，１次元写像でしか行ない得ない。ところが，力学系のパワースペクトルは，そのポアンカレー写像のパワースペクトルと一般に異なる。この困難を避けるため

(1) まず，力学系の時系列，または，実験で観測される時系列についてパワースペクトルの一般論をつくり，

(2) その一般論に含まれる統計量をきめるのにポアンカレー写像を援用する，

としよう。実際，カオスの発生点の近傍$\varepsilon\ll 1$では，このプログラムを実行することができる。

間欠的カオスの時系列は，バーストと周期的ラミナー状態の交代列からなる。n番目のバーストと$(n+1)$番目のバーストとの間のラミナー状態は

$$X_n(t)=[1+b_n(s)]\exp[i\omega_0 t+i\phi_n]$$